COLECCIÓN APUNTES UNIVERSITARIOS

MATEMÁTICAS II

GRADO ECONOMÍA	6 Créditos
GRADO ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS	6 Créditos
GRADO FINANZAS Y CONTABILIDAD	6 Créditos

Edita e imprime: PILLATONER SL

C/ Ramón Llull, 45 bajo – 46021 – Valencia

Teléfono: 96 304 57 13

E-mail:pillatoner@yahoo.es

Fecha segunda edición: Mayo 2014

Prólogo

Pillatoner SL, es una empresa dedicada a la edición y venta de apuntes para universitarios. Somos una empresa joven que tiene por objetivo lograr dotar al estudiante universitario de un material de apoyo adicional a los ya existentes (manuales, asistencia a clase, material de reprografía, etc.)

Es por ello que recopilamos los apuntes de aquellos alumnos que asisten regularmente a clase, que completan sus apuntes con manuales, así como con conocimientos previos. Ofrecemos al estudiante, un resumen de lo más imprescindible de cada asignatura, con el fin de que sirva de material adicional (adicional porque sin conocimientos previos, difícilmente valdrá de algo esta compilación de apuntes), a los métodos ya existentes.

Esperemos que con esta colección, la vida universitaria se haga al estudiante más corta y fructífera. Suerte y a estudiar, que es el único método conocido (exceptuando las chuletas), de aprobar la carrera.

Temario

Tema 1. Introducción a la optimización

- Convexidad
- Modelización y resolución de problemas de programación
- Transformaciones de problemas
- Teoremas básicos
- Resumen de convexidad

Tema 2. Programación no lineal

- Condiciones necesarias de optimalidad
- Condiciones necesarias de Khun-Tucker
- Interpretación económica de los multiplicadores

Tema 3. Introducción a la programación lineal

- Hechos básicos de la programación lineal
- Soluciones factibles básicas (o vértice)

Tema 4. El método simplex

- Algoritmo del simplex
- Variables artificiales

Tema 5. Dualidad en programación lineal

- Construcción del problema dual
- Calculo de la solución óptima dual

Tema 6. Análisis de sensibilidad y postoptimización

- Cambio de un coeficiente de la función objetivo
- Cambio en los términos independientes de las restricciones
- Cambio de un coeficiente técnico

Tema 7. Programación lineal entera

- Formulación general de los problemas lineales enteros

TEMA 1. INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN

1. CONVEXIDAD

Una empresa debe elegir cuando producir de cada producto.

x_1 y x_2= producción de 2 productos = max $x_1 + x_2$

Mano de obra 3 horas de x_1, 2 horas de x_2 12 horas

Dos limitaciones $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

Inputs$x_1 + 2x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$

- Elementos ade un problema de optimización matemática

Opt. $f(x_1 \ldots xn)$ s.a. $g(x_1 \ldots xn) \leq \geq b$

- $x_1 \ldots xn$= variables principales
- Restricciones $g(x_1 \ldots xn) \leq b$ intervienen las dos variables.
- Condiciones de dominio $X_i \geq 0$ No negatividad interuve una variable.
  Mí ≤ X_i≤ Mí variable afitada X_iÎIN

$X_i \in \psi$ 0, 1} variables binarias X_i libre= tener cualquiera valor.

- Tomar decisiones

- Función objetivo se puede max o min.

Conjunto de oportunidades o región factible S entre 2 y 3

$S = \psi(X_1, X_2) \in TR^2 / 3X_1 + 2X_2 \leq 12,\ X_1 + 2X_2 \leq 10,\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0\}$

Si $(X_1, X_2) \in S \rightarrow$punto factible o posible.

- Clasificaciones de los problemas. Tipo :

Programación no lineal = permite cualquiera tipo de función (lineales o no) caso general. Tema 2.

Programación lineal = las funciones sieso lineales. Temas del 3 al 6.

Programación clásica= funciones lineales o no lineales. Sin restricciones o con restricciones de igualdad. Tema 2.

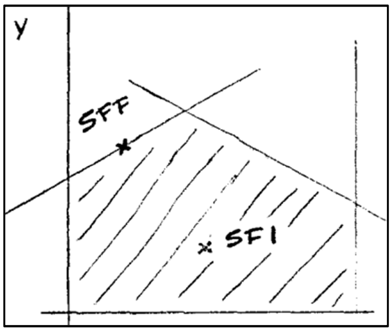
Programación lineal entera = funciones lineales con alguna variable entera.

- Ejemplo x + y s.a. $x^2 + y^2 = 9$ Programación clásica.
- Clasificación de los tipo de solución→cualquiera valor de la variable.
- Solución factible→aquella que pertenece al conjunto de oportunidadesΞ∈ S
- Solución infactible→aquella que no pertenece al conjunto de oportunidades $X \notin S$.

S.F. interior : desigualdad estricta en las restricciones

Ξ∈ S

S.F. frontera : alguna restricción con igualdad.



Óptimos. 8 posibles definiciones.

Máximo. – mínimo Locales – globales Estricto – no estricto

f(x) función objetivo Σ→conjunto de oportunidades.

- Mínimo global no estricto→ si f(x*) ≤f∀XÎs
  - Mínimo global estricto→ si f(x*) <f (x) , ∀ÎS
  - Mínimo local no estricto→ si f(x*) ≤f (x), ∀ξ∈ B (x*,ε)P S ∀ε> 0
  - Mínimo local estricto→ si f(x*) <f(x), ∀x∈ B(x*,ε)Π S ∀ε> 0
  - Global implica a local si se estricto implica no estricto.

- Clases de problemas según su solución.
  - Infactible : el conjunto de oportunidades se un conjunto vacío S = {∅}
  - Factible : el conjunto de oportunidades no se un conjunto vacío Σ≠{∅}

Con solución global

Factibles

Sin solución global : no afitats.

2. MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN

no lineales

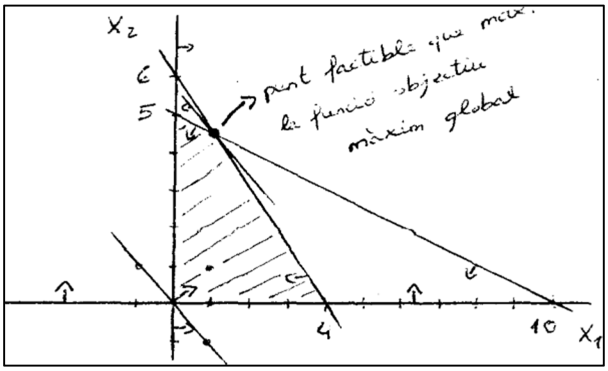
$n = 2$ Variables

lineales

Max $x_1 + x_2$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$



Representan la región factible

$3x_1 + 2x_2 = 12 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \ (0,6)$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 4 \ (4,0)$

Punto de prueba (0,0) pertenece a los dos

Conjuntos $\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{matrix}$

$X_1+2x_2=10 \quad x_1=0 \quad x_2=5 \quad (0,5) \quad x_2=0 \quad x_1=10 \quad (10,0)$

∇f dirección de máximo crecimiento $\nabla f = (1,1)$

Representar $x_1+x_2=0$ curva de nivel (1, -1) (-1, 1)

Calculamos el máximo global

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 & x_1 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 10 & x_2 = 9/2 \end{cases} \qquad x_1 + x_2 = \tfrac{11}{2}$$

3. TRANSFORMACIONES DE PROBLEMAS

Enunciado transformado

Solución original
Tres bloques :

1erbloque : Función objetivo

1ª - Cambio de la dirección de optimización Max f(x) $\leftrightarrow$Min – f(x)

<u>Prob. 2</u>

$Max x^2 + y^2 \rightarrow Min - 2^2 - y^2$ si (x,y) = (1,2) $\leftrightarrow$(x,y) = (1,2)

f = 5 f = 5

1b – Eliminación de constantes opt f (x) + K $\leftrightarrow$Opt f (x)

Ejemplo Max $x^2 + y^2 + 10$ Max $x^2 + y^2$

(x,y) = (2,2) f = 18 (x,y) = (2,2) f = 8

2º bloque : Restricciones $\leq = \geq$

2ª - Cambiar desigualdades g (x) ≤ b $\leftrightarrow$ -g (x) ≥ -b

<u>Prob. 3</u>

x + y ≤6 = -x –y ≥ -6

2b – Cambio de igualdad a desigualdades = $\rightarrow \geq$ = $\rightarrow \leq$

g (x) = b g (x) ≤ b g (x) ≥ b

<u>Prob. 2</u>

X + y = 1 $\Rightarrow$ x + y ≤ 1 x + y ≥ 1 -x –y ≤ -1

2c – Cambio desigualdades por igualdades. g (x) ≤ b g (x) ≥ b

Introducción de variables de holganza (diferencia entre los dos miembros mayores o iguales que 0) g (x) + 5 = b g (x) – 5 = b

Prob. 4

$x + 2y + z \leq 30$ $\quad$ $x + 2y + z + 5 = 30$

$x + y \geq 20$ $\quad$ $x + y - t = 20$ $\quad$ $s,t \geq 0$ saber interpretar lo que significan las variables.

3^er^bloque : Condiciones de signo de las variables.

Cambio de variable $x_1 = -x$ $\quad$ $x_1 \geq 0$ se debe transformar todo el problema

Prob. 4

Max $2x + 3y + z$ s.a. $2x + 3y + z \leq 30$ $\quad$ $x + y \geq 20$ $\quad$ $x,y \geq 0$

Max $2x - 3y_1 + z$ s.a. $2x - 3y_1 + z \leq 30$ $\quad$ $x - y_1 \geq 20$ $\quad$ $x \geq 0$ $\quad$ $y_1 \geq 0$ $\quad$ $y_1 = -4$

Si $(x, y_1, z) = (1,2,4)$ $\quad$ $(x,m\ y, z) = (1, -2, 4)$

3 b x libres $x = x_1 - x_2$ $\quad$ $x_1 \geq 0$ $\quad$ $x_2 \geq 0$ se debe transformar todo el prob.

Prob. 2

Max $x^2 + y^2$ s.a. $x + y = 1$ $\quad$ $x = x_1 - x_2$ $\quad$ $y = y_1 - y_2$

Nuevas variables no negativas, expresadas como a diferencia de las iniciales

$$\text{Max } (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\text{s.a. } x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = 1 \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

Si $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 2, 3, 0)$ $\quad$ $(x, y) = (-2, 3)$

Enunciados Preferidos

Programación no lineal: Max $f(x)$ s.a. $g(x) \leq b$; Min $f(x)$ s.a. $g(x) \geq b$

Programación lineal: Max $f(x)$ s.a. $g(x) = b$ $\quad$ $x \geq 0$

Prob. 3

Min $x^2 + y^2$ $\quad$ s.a. $x + y \leq 6$ $\quad$ $x . y \leq 4$ $\quad$ $y \geq 0$

– Programación clásica NO, programación lineal No, programación no lineal Si.

– Conjunto de oportunidades S={(x,y) ? TR^2 / $x + y \leq 6$, $x . y \leq 4$, $y \geq 0$}

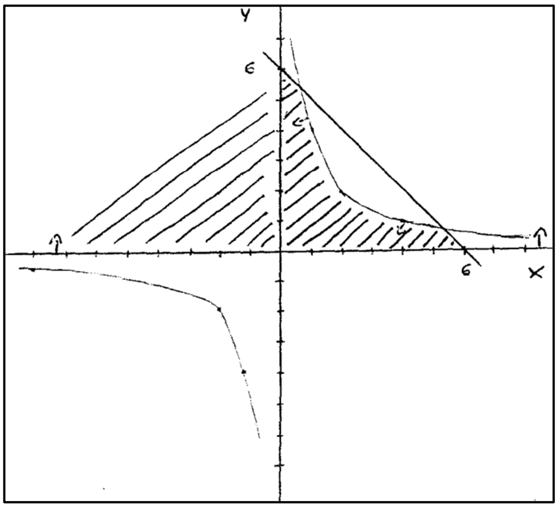
S.F.Y. = (1, 1) S.F.F. = (1, 0) S.N.F. = (0, -1)

– Weierstrass $f = x^2 + y^2$continúa por ser un polinomio.

S acotado por incluir la igualdad todas las restricciones

S compacto

S acotado NO



Semiespacio $x + y \leq 6$

$x = 0$ $y = 6$ $y = 0$ $x = 6$

(0, 0) cumple la 1ª restricción?

Si, pertenece al conjunto de oportunidades.

X X	Y	X	Y
2	2	-1	-4
4	1	-2	-2
1	4	8	1/2

(0, 0) cumple la 2ª restricción?

Si, también pertenece al conjunto de oportunidades.

No hay valor inferior para x, ni superior para Y.

No estágarantizada la existencia de máximo y mínimo global.

– Transformar el problema de maximizar, restricciones mayor o igual.

- o Max $-x^2 - y^2$ s.a. $-x -y \geq -6$ $-x y \geq -4$ $y \geq 0$

4. TEOREMAS BÁSICOS

Optimizar f(x) s.a $\xi\in$

Teorema de Weierstrass (de existencia de óptimos globales)		n=2 gráficamente
		n > 2 manipulan las restricciones.

Si f es continúa y S es compacto = existe máximo y mínimo global S $1\{\varnothing\}$

Si ff es compacto y cerrado: El complementario es un conjunto abierto TRn~S sus puntos frontera son del conjunto S = si las restricciones incluyen la igualdad forman un conjunto acotado.

S acotado : Mí $\leq x_i \leq$ Mí $\forall_y$ = 1…n

Ejemplo

$$S = \{(x,y,z)\in TR^3 \,/\, 2x+3y+5z \leq 20, x,y,z \geq 0\} \left.\begin{matrix} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 20/3 \\ 0 \leq z \leq y \end{matrix}\right\} afitat$$

Teorema local – global

- Si f cóncava (estrictamente), S es convexo y x* es máximo local→x* es máximo global (único).
- Si f convexa (estrictamente), S es convexo y x* es mínimo local→x* es mínimo global (único).

5. RESUMEN DE CONVEXIDAD

		Igualdades lineales: hiperplanos $\rightarrow$ convexo	
		Desigualdades lineales : semiespacios $\rightarrow$ convexo	
		Igualdades no lineales : no convexo	
Conjunto convexo (S)		Desigualdades no lineales : conjunto de nivel	Inferior (≤)con g Convexa g (x) ≤ x
			Superior (≥) con g
			Cóncava g (x) ≥ x
		La intersección de convexos es convexo	

		Si es lineal, cóncava y convexa al mismo tiempo pero no estrictamente.			
				$\lvert H \rvert \neq 0$ menores conducentes:	DP estrictamente convexa DN estrictamente cóncava Y ni cóncava ni convexa
Funciones convexas y cóncavas (f)		Si se no lineal	Hessiana		
				$\lvert H \rvert = 0$ menores principales:	SDP convexa SDN cóncava Y ni cóncava ni convexa