COLECCIÓN APUNTES UNIVERSITARIOS

MATEMÁTICAS I

GRADO ECONOMÍA	6 Créditos
GRADO ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS	6 Créditos
GRADO FINANZAS Y CONTABILIDAD	6 Créditos
DOBLE GRADO ADE - DERECHO	6 Créditos

Edita e imprime: PILLATONER SL

C/ Ramón Llull, 45 bajo – 46021 – Valencia

Teléfono: 96 304 57 13

E-mail:pillatoner@yahoo.es

Fecha segunda edición: Mayo 2014

Prólogo

Pillatoner SL, es una empresa dedicada a la edición y venta de apuntes para universitarios. Somos una empresa joven que tiene por objetivo lograr dotar al estudiante universitario de un material de apoyo adicional a los ya existentes (manuales, asistencia a clase, material de reprografía, etc.)

Es por ello que recopilamos los apuntes de aquellos alumnos que asisten regularmente a clase, que completan sus apuntes con manuales, así como con conocimientos previos. Ofrecemos al estudiante, un resumen de lo más imprescindible de cada asignatura, con el fin de que sirva de material adicional (adicional porque sin conocimientos previos, difícilmente valdrá de algo esta compilación de apuntes), a los métodos ya existentes.

Esperemos que con esta colección, la vida universitaria se haga al estudiante más corta y fructífera. Suerte y a estudiar, que es el único método conocido (exceptuando las chuletas), de aprobar la carrera.

Temario

Tema 1. Nociones básicas de álgebra

- Definición y propiedades inmediatas
- Dependencia e independencia lineal de vectores
- Subespacio vectoriales
- Bases. Dimensión
- Ejercicios
- Concepto
- Matriz de una aplicación lineal
- Ejercicios

Tema 2. Límites y continuidad de funciones

- Propiedades
- Límites. Continuidad
- Ejercicios

Tema 3. Derivabilidad de funciones

- Derivadas parciales. Vector gradiente
- Derivadas direccionales. Diferencial
- Derivadas parciales sucesivas
- Ejercicios

Tema 4. Diferenciabilidad de funciones

- Funciones compuestas
- Funciones homogéneas
- Formas cuadráticas reales
- Convexividad
- Optimización

Tema5. Introducción al cálculo integral y a las ecuaciones diferenciales

- La integración definida
- Integradas impropias
- Integral múltiple
- Ecuaciones diferenciales

TEMA 1. NOCIONES BÁSICAS DE ÁLGEBRA

1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES INMEDIATAS

Diferencia entre escalar y vector:

- Un escalar es un número.
- Un vector es un elemento formado por dos o más escalares (Separados por comas), a los que llamaremos componentes.

Ejemplo :

Escalar : 7

$$Vectores \begin{cases} (3,4) \\ (1,3,2) \end{cases}$$

Concepto de espacio vectorial:

Un espacio vectorial es conjunto E de vectores en el que se define una primera operación (o ley de composición) y que es la suma de vectores:

De manera que dados dos vectores cualesquiera :

$$\begin{cases} \vec{X} \in E \\ \bar{y} \in E \end{cases} \rightarrow \bar{X} + \bar{y} \in E:$$

La suma de 2 vectores es siempre otro vector.

Definición completa de espacio vectorial:

Un espacio Vectorial es un conjunto E de vectores en el que se han definido dos operaciones:

La suma de vectores y la multiplicación de un escalar por un vector; cada una de las operaciones con las propiedades citadas.

$$\boxed{(E, +, \cdot) \rightarrow K}$$

Nota:La suma de vectores se dice que es una ley de Composición interna porque la suma de 2 vectores da otro vector.

Propiedades de la ley de composición interna: (Suma)

E = Conjunto de vectores.

1. **Asociativa**: $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E$, se ha de cumplir : $\boxed{\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (\bar{x} + \bar{z}) + \bar{y}}$

2. **Existencia de elemento neutro**:

Ha de existir en el conjunto E, un vector $\vec{O}$ tal que, $\forall\ \overline{x} \in E$, se cumpla :

$$\boxed{\overline{x} + \overline{O} = \overline{x}}$$

3. **Existencia de elemento simétrico**:

Para cada vector $\overline{x} \in E$ ha de existir otro vector $\boxed{\overline{x}^{-1} \,/\, \overline{x} + x^1 = \overline{O} ; \overline{x}^{-1} \ :}$

Elemento simétrico de $\overline{x}$.

$$\boxed{\text{Ejemplo : } \begin{array}{l} \overline{x} = (2, 3, 4) \\ \overline{x} = (-2, -3, -4) \rightarrow \text{Este es el vector Simétrico de } \overline{x} \end{array}}$$

Nota: El elemento neutro es único para todos los vectores, pero en cambio, cada vector tiene su propio elemento simétrico.

$$\boxed{\overline{x}^{-1} = -\overline{x}}$$

4. **Conmutativa** :

$\forall\ \overline{x}, \overline{y} \in E$ ha de cumplirse : $\boxed{\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}}$

B. Definimos en el conjunto E una segunda operación :

2ª OPERACIÓN :

Multiplicación de un escalar por un escalar.

E : Conjunto de Vectores

K : Conjunto de Escalares

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\ \overline{x} \in E \\ \forall\ \alpha \in K \end{array}\right\} \alpha \cdot \overline{x} \in E \rightarrow \text{Cualquier escalar por cualquier vector nos dará siempre un vector.}}$$

Ejemplo : 3 (1, 2, 4) = (3, 6, 12)

Nota: La multiplicación de un vector por un escalar es una laye de composición externa.

Propiedades de la ley de composición externa:

1. Propiedad distributiva de escalar respecto a vectores :

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ \alpha \in K\\ \forall\ \bar{x},\ \bar{y} \in E\end{array}\right\}\alpha\cdot(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\cdot\bar{x}+\alpha\cdot\bar{y}$$

Ejemplo :

$$3\,[(1,3,2)+(4,2,5)] = 3\,(1,3,2) + 3\,(4,2,5)$$

2. Distributiva de vector respecto a escalares :

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ \bar{x} \in E\\ \forall\ \alpha, R \in K\end{array}\right\}\bar{x}\cdot(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\bar{x}+\beta\cdot\bar{x}$$

3. Asociatividad mixta de escalares :

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ \alpha\ \beta \in K\\ \forall\ \bar{x} \in E\end{array}\right\}\alpha\cdot(\beta\cdot\bar{x})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{x}$$

4. Existencia en K de elemento neutro de la multiplicación de esclares: En el conjunto K ha de estar el "1" de manera que :

$$1\cdot\bar{x}=\bar{x} \qquad \forall\ \bar{x}$$

2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Sea E un espacio vectorial. Sean : $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in$ E.

1) Decimos que los vectores : $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ son linealmente independientes si la ecuación :

$$\alpha_1\cdot\bar{x}_1+\alpha_2\cdot\bar{x}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\bar{x}_n=\bar{0}$$

ADMITE COMO ÚNICA SOLUCIÓN : $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ (Solución trivial)

2) Si por el contrario (<u>Además</u> de dicha Solución) existe alguna otra Solución, en la que al menos un $\alpha_i \neq 0 \rightarrow$ Los vectores son L.D.

$\alpha_1 \cdot (1,3,2) + \alpha_2 \cdot (4,1,5) = (0,0,0)$

Como única solución para que de (0,0,0), α_1 y α_2 tienen que se iguales y de valor 0, por lo que son L.I.

Si además de α_1 y α_2 nos dieran :

(-3)·(1,3,2) + 1 (3,9,6) = (0,0,0)

(0) · (1,3,2) + 0 (3,9,6) = (0,0,0)

· Se tienen los vectores : $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{V}_3$

· Se tienen los escalares :

$$\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \begin{cases} \text{en la ecuación :} \\ \alpha_1 \cdot \overline{V}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{V}_2 + \alpha_3 \cdot \overline{V}_3 = \overline{O} \end{cases}}$$

Se sabe que : $\boxed{\alpha_1 = O, \quad \alpha_2 = O, \quad \alpha_3 = O}$

No sabemos cómo son los vectores por que no se sabe si la solución trivial es la <u>única</u> o <u>no</u>.

<u>MÉTODO PRÁCTICO PARA ESTUDIAR SI UNA SERIE DE VECTORES SON L.I ó L.D.:</u>

1. Se colocan los vectores en columna → Matriz de vectores: M
2. Se calcula el rango de la matriz: Rg (M).
3. Si Rg (M): ↗ = nº de vectores → Los vectores son L.I.
   ↘ < nº de vectores → Los vectores son L.D.

Ejemplo:

Dados los vectores $\overline{V}_1 : (3,1,2)$, $\overline{V}_2 : (2,1,4)$, $\overline{V}_3 : (1,-1,0)$ ¿Son L.I.?

1.

NOTA : El Rg de una matriz es como máximo la dimensión menor.

En este caso, la dimensión máx. es 3.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

FILAS
↑
(3 X 3)
↓
COLUMNAS

2.- Calculamos el determinante de la matriz:

= (4+0-4) – (-12+2+0) = 0- (-10) = 10 ≠ 0

- Si el determinante es ≠ 0 → Rg (M) = 3
- Si el determinante es = 0 → Rg (M) < 3

3.- Por lo que el Rg (M) = 3 nº de vectores → L.I.

Ejemplo :

$\overline{V}_1 : (3,1,2);\quad \overline{V}_2 : (2,1,4)\quad ,\quad \overline{V}_3 : (5,2,6)$ ¿Son L.I?

1.-

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

FILAS
↑
(3 X 3)
↓
COLUMNAS

2.- Calculamos el determinante de la matriz : = (20+18+8) – (24+10+12) = 0

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

Si hay un determinante de (2 x 2) no nulo entonces Rg = 2.
Sino hay ningún determinante no nulo, miramos si algún número es no nulo y el Rg será 1.

3.- Como Rg (m) = 2 < 3 : nº de vectores → L.D.
Ejemplo :

$$\boxed{\overline{V}_1 : (3,1,4)\ ,\ \overline{V}_2 : (2,1,3)}$$

¿Son L.I?

1.-

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}$$

FILAS
↑
(3 X 2)
↓
COLUMNAS

2.- Calculamos el determinante de la matriz :

$$\boxed{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rg (M)} = 2}$$

3.- Como Rg (M) = 2 : nº de vectores → L.I
Ejemplo :

$$\boxed{\overline{V}_1 : (3,1,2)\ ,\ \overline{V}_2 : (4,1,3)\ ,\ \overline{V}_3 : (1,0,1)\ ,\ \overline{V}_4 : (3,1,1)}$$

¿Son L.I?

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

FILAS
↑
(3 X 4)
↓
COLUMNAS

2.- Calculamos el determinante de la matriz :

$= (3+3+0) - (0+2+4) = 9 - 6 = 3 \neq 0$

Rg = 3

3.- Como el Rg (M) = 3 < nº de vectores → Los vectores son L.D.

Ejemplo :

Dados los vectores : $\boxed{\overline{V}_1(1,3,2);\ \overline{V}_2(4,1,1)\ ,\ \overline{V}_3(2,3,a)}$

Calcular "a" para que los vectores sean L.D.:

1-

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix}}$$

FILAS
↑
(3 X 3)
↓
COLUMNAS

2- Calculamos el determinante de la matriz :

$= (6+a+24)-(3+4+12a)= 30+a - 7+12a =$

$= 30-7= 12a-a \rightarrow 23 = 11a$

$$\boxed{a = \frac{23}{11}}$$

▪ Si $a = \frac{23}{11}$ → Rg (m) = 2 < nº de vectores → L.D.

▪ Si $a = \frac{23}{11}$ implica que el Rg (m) es menor de 3 y como ha encontrado un menor de orden 2 que es ≠ 0, entonces el Rg = 2.

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11 \neq 0}$$

▪ Si $a \neq \frac{23}{11}$ → Rg (m) = 3 = nº de vectores → L.I.

- Para calcular determinantes mayores de 3 x 3 se aplicaría.

<u>El método de Chio</u>

- Se busca un 1, sino lo hubiera basta con dividir una final o una columna por un nº y multiplicar fuera por dicho número.
- Redondeamos, la fila y la columna donde está el uno.
- A los demás elementos se les resta el producto de los que le corresponden en la fila y columna que está el uno.
- Al resultado se le antepone signo positivo o negativo según el lugar que ocupa el 1 según el siguiente criterio:

"Si al sumar la fila y la columna donde está el 1 el resultado es par → signo positivo y si es impar signo negativo".

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \boxed{=} + \begin{vmatrix} -6 & -3 & -7 \\ -7 & -4 & -5 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

y ahora este lo hacemos por Sarrus.

Si la suma de la 1ª Fila y la 3ª Columna da par = (+)

y ahora este lo hacemos por Sarrus.
Si la suma de la 1ª Fila y la 3ª Columna da par = (+)

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Fila base

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4^a\ F = 4^a\ F - 4 \cdot 2^a\ F =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Columna base :

Hay que hacer ceros en esta columna

$$= O \cdot \text{Adj } 13 + 1 \cdot \text{Adj } 23 + O \cdot \text{Adj } 43 =$$

$$= (-1)^5 = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{array}{r|rrr|r} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -5 & 4 & -2 & -5 \end{array} =$$

$$= - \left[(24-30-30)-(36-50+12)\right] = -(-36)+2 = -(-34) = 34 \neq 0 =$$

IMPORTANTE

- Si una serie de vectores (conjunto) son **<u>L.I</u>**: Forman un **<u>SistemaLibre</u>**.
- Si una serie de vectores son **<u>L.D.</u>**: Forman un **<u>Sistema Ligado</u>**.

<u>Sistema de generadores de un espadio vectorial:</u>

Se dice que un conjunto de vectores es un Sistema generador de un espacio vectorial, si a partir de dichos vectores y por combinación lineal de ellos se puede obtener cualquier vector del espacio vectorial.

En un sistema de generadores <u>los vectores pueden ser L.D ó L.I.</u>

<u>Sistema mínimo de generadores:</u>

Es el número mínimo de vectores necesarios para que por combinación lineal de ellos, se pueda obtener cualquier vector del espacio vectorial.

En un sistema mínimo de generadores, <u>los vectores son siempre L.I.</u>

3. SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea E un espacio vectorial y sea F un subconjunto de vectores de E : (F < E) ⇢ Es decir : F está incluido en E.

Se dice que F es un espacio vectorial de E si :

A) $\boxed{\forall\ \bar{x}, \bar{y}, \in F \ \rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in F}$ (Ley de Composición interna).

B) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\ \bar{x} \in F \\ \forall\ \alpha \in K \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \cdot \bar{x} \in F}$ (Ley de Composición Externa).

<u>NOTA :</u> Un subespacio vectorial será un Subconjunto de vectores que posee las mismas propiedades del espacio vectorial.

Características de un subespacio vectorial:

Se llama caracterizar un subespacio vectorial a indicar las características específicas que poseen todos los vectores de dicho subespacio vectorial.

1. Mediante una base del Subespacio.

Como una base es un sistema generador, si conocemos una base del subespacio, sabemos que cualquier vector del subespacio se podrá obtener a partir de los Vectores de dicha base.

2. Mediante ecuaciones paramétricas del Subespacio:

Son las que se obtienen al expresar un vector genérico (cualquiera del subespacio, como combinación lineal de los vectores de una base).

3. Mediante las ecuaciones características del Subespacio:

Son las que se obtienen al exigir que sea compatible el sistema formado por las ecuaciones paramétricas.

Dimensión de un subespacio vectorial:

Es el nº de vectores que tiene cualquier base de dicho Subespacio (Pero los vectores seguirán teniendo tantos componentes como dimensión tiene el espacio).

Pasos:

- Nos darán un sistema de generadores del Subespacio.
- Comprobaremos si los vectores son dependientes o independientes.
- Si son independientes formarán una base del Subespacio y el número de vectores de dicha base será la dimensión del subespacio.
- Expresaremos un vector genérico (cualquiera) del subespacio como combinación lineal de los vectores de dicha base y obtendremos las ecuaciones paramétricas.
- Exigimos que sea compatible el sistema de las ecuaciones paramétrcas Rg (C) = Rg (A).
- La ecuación o ecuaciones obtenidas ya son las ecuaciones características.

NOTA : Se cumplirá siempre:

La Dimensión de Subespacio + Nº de ecuaciones = Dimensión E

Ejemplo :

Dado el Subespacio Vectorial "F": < (1,3,2) , (4,1,0) >.

- Hallar las ecuaciones características.
- Estudiar si el vector (2,3,4) $\in$ F.

▪ Ahora seguiremos los pasos :

- Nos darán un sistema generador del Subespacio.
- Comprobar si los vectores son L.D ó L.I :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3x2} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11 \neq 0$$

$$\text{Rg (M)} = 2 = \text{n}^{\text{o}} \text{ vectores} \rightarrow L.I$$

3. Entonces, al tratarse de vectores L.I, constituirá una base de

F : B_F = { (1, 3, 2) , (4, 1, 0) }

Dimensión de F = 2 → (Porque la base tiene dos vectores)

4 y 5. Ecuaciones paramétricas :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2, x_3) \in \text{ F} \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 3, 2) + \beta(4,1,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha + 4\beta \\ x_2 = 3\alpha + \beta \\ x_3 = 2\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \text{Ecuaciones Paramétricas}$$

Todo vector del Subespacio ha de ser combinación Lineal de los vectores de una base (del Subespacio).

5. Ecuaciones Características :

Exigimos que sea compatible el sistema de las ecuaciones paramétricas.

NOTA : Para que un sistema sea compatible el Rg (C) = Rg (A).

C : Matriz de los Coeficientes.

A : Matriz Ampliada.

$$\boxed{C=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-12=-11\neq 0 \quad \text{Rg (C)}=2}$$

$$\boxed{A=\begin{vmatrix}X_1 & 1 & 4\\ X_2 & 3 & 1\\ X_3 & 2 & 0\end{vmatrix}=0}$$

• Tenemos que hacer que la matriz ampliada tenga Rg (A) = 2
• Tenemos que hacer que el determinante sea 0, para que así el Rg (A) no sea 3.

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & x_1 & -1 & 4 & x_1\\ 1 & x_2 & 3 & 1 & x_2\\ 0 & x_3 & 2 & 0 & x_3 \end{array} = 0 \rightarrow (8x_2+0+x_3)-(2x_1+12x_{3+0})=0$$

$$8x_2+x_3-(12x_3+2x_1)=0$$
$$8x_2-11x_3-2x_1=0$$

$\boxed{-2x_1+8x_2-11x_3=0}$ $\rightarrow$ Ec. Característica del subespacio vectorial. Esta ecuación es la que cumple cualquier vector del Subespacio vectorial.

▪ Para que un vector pertenezca al Subespacio vectrial ha de cumplir esta ecuación :

Ejemplo : (1, 3, 2) :

- $2 x_1 + 8 x_2 - 11 x_3 = 0$
- $2 \cdot (1) + 8 \cdot (3) - 11 \cdot (2) = 0$
- $2 + 24 - 22 = 0$ → Si que se cumple.

(4, 1, 0) :

- $2 x_1 + 8 x_2 - 11 x_3 = 0$
- $2 \cdot (4) + 8 \cdot (1) - 11 \cdot (0) = 0$
- $8 + 8 = 0$ → Si que se cumple.

El vector (2, 3, 5) ¿Pertenece a F?

- $2 x_1 + 8 x_2 - 11 x_3 = 0$
- $2 \cdot (2) + 8 \cdot (3) - 11 \cdot (5) = 0$
- $4+ 24 - 55 = -35 \neq 0$ → No pertenece al Subespacio Vectorial.

- (2, 3, 5) $\notin$ F

<u>NOTA :</u> Siempre se cumplirá que:

Dimensión del Subespacio Vectorial + nº de Ecuaciones características = Dimensión de E.

Se considera el Subespacio F : < (0, 1, 3) , (4, 1, 1) >

Nos piden:

- Obtener las ecuaciones Características.
- Estudiar si el vector (2, 3, 5) $\in$ F.

▪ Ahora seguiremos los pasos:

- Nos han dado un sistema de generadores.
- Comprobar si los vectores son L.D ó L.I :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3x2} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$$

$$\text{Rg (M)} = 2 = \text{n}^\text{o} \text{ vectores} \rightarrow L.I$$

3. Entonces, al tratarse de vectores L.I, constituirá una base de

F: B_F = {(0, 1, 3) , (4, 1, 1) }

- Dimensión E = 3 (nº de Componentes)
- Dimensión F = 2 (nº de Vectores)

4. Ecuaciones Paramétricas:

$$\forall(x_1, x_2, x_3) \in \text{ F } \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \alpha(0,1,3) + \beta(4,1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4\beta \\ x_2 &= \alpha + \beta \\ x_3 &= 3\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones Paramétricas}$$

5. Ecuaciones Características:

- Exigimos que sea compatible el sistema de las ecuaciones paramétricas.

Rg (C) = Rg (A) .

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0 \quad \text{Rg (C)} = 2$$

$$A = \begin{vmatrix} X_1 & 0 & 4 \\ X_2 & 1 & 1 \\ X_3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Tenemos que hacer que la matriz ampliada tenga Rg (A) = 2
- Tenemos que hacer que el determinante sea 0, para que así el Rg (A) no sea 3.

$$\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 4 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow (12x_2 + x_1 + 0) - (3x_1 + 4x_3 + 0) = 0 \\ 12x_2 + x_1 - 3x_1 - 4x_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{-2\ x_1 + 12\ x_2 - 4\ x_3 = 0}$$

Ecuación Característica de Subespacio Vectorial

▪ Ahora comprobaremos si hemos hecho bien la Ecuación :

(0, 1, 3):

- $2\ x_1 + 12\ x_2\ - 4\ x_3 = 0$
- $2 \cdot (0) + 12 \cdot (1) - 4 \cdot (3) = 0$

$0 + 12 - 12 = 0$ → Si que se cumple.

(4, 1, 1):

- $2\ x_1 + 12\ x_2\ - 4\ x_3 = 0$
- $2 \cdot (4) + 12 \cdot (1) - 4 \cdot (1) = 0$
- $8 + 12 - 4 = 0$ → Si que se cumple.

2) El vector (2, 3, 5) ¿Pertenece a F?

- $2\ x_1 + 12\ x_2\ - 4\ x_3 = 0$
- $2 \cdot (2) + 12 \cdot (3) - 4 \cdot (5) = 0$
- $4 + 36 - 20 = 0$ → No se cumple. $(2, 3, 5) \notin$ F.

4. BASES. DIMENSIÓN

<u>Base de un espacio vectorial:</u>

Sea E un espacio Vectorial :

Una base de E es un conjunto de vectores que cumple 2 condiciones :

$\left.\begin{array}{l}\text{A) Los vectores son L.I.}\\ \text{B) Los vectores forman un sistema de generadores}\end{array}\right\}$ sistema mínimo de generadores

Una base = sistema mínimo de generadores.

<u>Nota</u>: La 2ª condición de base se presupone, por lo que, bastará con comprobar si los vectores son L.I (1ª Condición).

Toda Base (hay infinitas) tendrá un nº de vectores igual a la dimensión del espacio Vectorial.

Toda Base de $IR^3 \rightarrow$ Tendrá exactamente 3 vectores.

Ejemplo:

Estudiar si los vectores $\overline{V_1}(2,1,3)$, $\overline{V}_2(1,1,0)$, $\overline{V}_3(3,1,1)$ forman bases en IR^3 (comprobar 1ª Condición) → ¿Son L.I?

$$\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 1 \end{array}\Bigg| \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\Bigg| \qquad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}$$

1º Hallar el Rango de la Matriz :

$= (3+2+0)-(0+9+1) = 5-10 = -5 \neq 0$

Por lo que el Rg (M) $= 3 =$ nº de vectores.

(Es L.I)

Solución : $B_E = \{(2,1,3), (1,1,0), (3,1,1)\}$ Son vectores L.I y forman base.

<u>Dimensiones de un espacio vectorial:</u>

- Es el número de componentes que posee cualquier vector de dicho espacio vectorial.
- Es el número de vectores que tiene cualquier base en dicho espacio vectorial.

Espacio Vectorial IR^3 = Dimensión 3 → Todos los vectores tienen 3 componentes.

(2, 3, 1, 0) $\in$ IR^4 = Espacio Vectorial de Dimensión 4.

De dimensión 2 → El vector tiene 2 componentes y 2 vectores.

5. EJERCICIOS

<u>EJERCICIO 1.</u>

Comprobar que H = {(x, y, Z) $\in$ IR^3 / x + y + Z = 0} es un subespacio vectorial en IR^3 y encontrar una base.

A) Comprobar que forma un subespacio vectorial:

Como la ecuación característica es:

- Lineal
- Homogénea

Se trata de un subespacio vectorial.

B) Encontrar una Base.

- Dimensión F + nº ecuac. Características = Dimensión E

$\boxed{2}$ + 1 = 3

•Una base estará formada por dos vectores:

- Qué cumplan dicha ecuación característica.
- Qué sean L.I.
    - o X + y + Z = 0:
    - o (2, 3, - 5) → 2 + 3 – 5 = 0
    - o (3, 4, -7) → 3 + 4 –7 = 0

Ahora comprobaré que son L.I:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -14 + 15 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 20 = -1 \neq 0$$

Son L. I.

EJERCICIO 2.

A) Encontrar las ecuaciones del Subespacio generado por {(1, -1,0), (0, 1,-1)}

B) Idem. Con {(1, 1, 0)}

A) Seguiremos los pasos:

1. Nos dan un sistema generador: < (1, -1, 0), (0, 1, -1)>

2. Comprobar si los vectores son L.D o L.I.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; \left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1-0 = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \text{Rg (M)} = 2 = \text{n}^{\text{o}} \text{ vectores} \rightarrow \text{L.I}$$

3. Entonces, al tratarse de vectores L.I, constituirá una base de F:

B_F = {(1,-1,0), (0, 1, -1)

- Dimensión F + nº ecuac. Características = Dimensión E

2+1=3

4. Ecuaciones paramétricas:

$$\forall(x_1, x_2, x_3) \in F \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \alpha\ (1, -1, 0) + \beta\,(0,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha + \beta \\ x_3 = -\beta \end{array}\right\} \text{Ec. paramétric as.}$$

5. Ecuaciones Características:

Exigimos que sea compatible el sistema de las Ecuaciones paramétricas:

$$\text{Rg (C)} = \text{Rg (A)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{Rg (C)} = 2$$

$$A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ Z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- $\text{Rg (A)} =$ ha de ser 2.
  El Rg (A) no puede ser 3. El determinan te ha de valer 0.

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ Z & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ Z \end{matrix} = (0 + x + Z) - (-y) = x + Z + y = 0$$

$$x + y + Z = 0 \rightarrow \text{Ecuac.Caracteríaticas}$$

Y ahora se comprueba en la ecuación los vectores (1, -1, 0), (0, 1, -1):

$$X + y + Z = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 1 - 1 + 0 = 0 \\ 0 + 1 - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ si que se cumple.}$$

B) F: < (1, 1, 0) >

Seguiremos los pasos:

1. Nos dan un sistema generador.
2. Comprobaremos si el vector es L.D o L.I:

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Rg (M)} = 1 = \text{n° de vectores} \rightarrow \text{L.I}}$$

3. Entonces, al tratarse de un vector L.I, constituirá una base de F.

$$B_F = \{(1, 1, 0)\}$$

- Dimensión F + nº Ecuación característica = Dimensión E

  1+2= 3

4. Ecuaciones Paramétricas:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in F \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \alpha \ (1, 1, 0)$$

$$\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \alpha \\ Z = 0 \end{matrix}\right\} \text{Ecuaciones Paramétric as}$$

5. Ecuaciones Características:

Exigimos que sea compatible el sistema de Ecuaciones paramétricas,

Rg (C) = Rg (A).

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Rg (C)} = 1 \qquad A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 1 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$$

- Rg (A) no ha de ser 2.
  Todos los menores o determinantes de 2x2,
  han de valer 0.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x - y = 0 \\ \begin{vmatrix} y & 1 \\ Z & 0 \end{vmatrix} = 0 - Z = 0 \\ \begin{vmatrix} x & 1 \\ Z & 0 \end{vmatrix} = 0 - Z = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones Características}$$

Y ahora se comprueba en las ecuaciones el vector (1, 1, 0):

$$\left.\begin{array}{ll} x - y = 0 & 1 - 1 = 0 \\ -Z \;\; = 0 & -0 = 0 \end{array}\right\} \text{Si que se cumple.}$$

<u>EJERCICIO 3.</u>

Determinar los valores de Z para los cuales el vector (1, 3, Z) es combinación lineal de los vectores (1, 2, 4) y (1, -5, 1).

Encontrar los coeficientes de la combinación lineal.

▪ Para que el vector (1, 3, Z) sea combinación lineal de los vectores (1, 2, 4) y (1, -5, 1):

$$(1, 3, Z) = \alpha\,(1, 2, 4) + \beta\,(1, -5, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \alpha + \beta \\ 3 = 2\alpha - 5\beta \\ Z = 4\alpha + \beta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 - \beta \\ 3 = 2\cdot(1-\beta) - 5\beta \qquad 3 = 2 - 2\beta - 5\beta \\ 3 - 2 = -7\beta \end{array}$$

$$\beta = \frac{1}{-7} = \frac{-1}{7}$$

$$\alpha = 1 - \left(\frac{-1}{7}\right) = \frac{8}{7}$$

$$Z = 4\cdot\frac{8}{7} - \frac{1}{7} = \frac{32}{7} - \frac{1}{7} = \frac{31}{7}$$

$\cdot$ Coeficientes de la combinación lineal $= \left(\alpha = \frac{8}{7}, \beta = \frac{-1}{7}, Z = \frac{31}{7}\right)$

EJERCICIO 4.

Considerar los vectores {(1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 2, 0)}

A) Demostrar que son una base en IR^3.

B) Hallar las coordenadas en dicha base de los vectores.

((3, 1, 5), (2, 0, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))

C) Hallar la expresión general de las coordenadas de un vector (x, y, Z) en dicha base.

A) ▪ Para que sean base ha de cumplir:

- Sea un sistema generador.
- Que sean L.I.

Consideramos que los vectores (1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 2, 0) son un sistema de generadores.

Ahora hay que comprobar si son L.I:

$$\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = (0+0+6) - (2+0+0) = 6 - 2 = 4 \neq 0$$

Rg (M) = 3 = nº de vectores → L.I.

Al cumplir ambas condiciones, forman base de IR^3.

$B_F\ IR^3 = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 2, 0)\}$

B) $(3, 1, 5) = \alpha\ (1, 2, 3) + \beta\ (1, 1, 1) + \wp\ (0, 2, 0)$

$(3, 1, 5) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\beta, \beta, \beta) + (0\wp, 2\wp, 0\wp)$

$$\left.\begin{matrix} 3 = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha + \beta + 2\wp \\ 5 = 3\alpha + \beta \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \alpha = 3 - \beta \rightarrow 3 - 2 = 1 \\ 5 = 3 \cdot (3 - \beta) + \beta \qquad 5 = 9 - 3\beta + \beta \\ 5 - 9 = -2\beta \qquad -4 = -2\beta \qquad \beta = \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$$

$$1 = 2\alpha + \beta + 2\wp$$

$$1 = 2 \cdot 1 + 2 + 2\wp \qquad 1 - 2 - 2 = 2\wp$$

$$\wp = \frac{-3}{2}$$

(Y lo mismo con el resto de Coordenadas).

C)

$$\alpha = \frac{\begin{array}{c|ccc|c} 0 & x & 1 & 0 & x \\ 2 & y & 1 & 2 & y \\ 0 & Z & 1 & 0 & Z \end{array}}{4} = \frac{(0+0+2Z)-(2x+0+0)}{4} = \frac{2Z-2x}{4}$$

$$\beta = \frac{\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 2 & 2 & y & 2 & 2 \\ 0 & 3 & Z & 0 & 3 \end{array}}{4} = \frac{(0+0+6x)-(2Z+0+0)}{4} = \frac{6x-2Z}{4}$$

$$\wp = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 1 & Z \end{vmatrix}}{4} = \frac{(2x+Z+3y)-(y+3x+2Z)}{4} = \frac{2x+Z+3y-y+3x-2x}{4} =$$

Solución

- X=1
- Y=2
- Z= -3/2

6. CONCEPTO

Sea E y F dos espacios vectoriales :

E : Espacio Vectorial Origen.

F : Espacio Vectorial Imagen.

Se llama <u>aplicación lineal</u> de E en F y se representa :

f : E $\rightarrow$ F a toda aplicación que cumple 2 condiciones :

1. $\boxed{\int(\overline{x}+\overline{y})=\int(\overline{x})+\int(\overline{y}) \qquad \forall\ \overline{x}, \overline{y} \in E}$

↳La Imagen de la Suma = a la suma de las Imágenes.

2. $\boxed{\begin{array}{ll} \int(\alpha \cdot \overline{x})=\alpha \cdot \int(\overline{x}) & \forall\ \overline{x} \in E \\ & \forall\ \alpha \in K \end{array}}$

↳La Imagen de un escalar son un vector = al escalar por la imagen del vector.

<u>NOTA :</u> $\int(\overline{x})$: Imagen del vector $\overline{x}$

NOTA : Es evidente que la imagen de 1 vector siempre está en F.

$\overline{X}$ $\int(\overline{X})$

EF

7. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Es aquella matriz que nos proporciona la imagen de 1 vector cualquiera de E para lo cual, basta con multiplicar la matriz por dicho vector.

EJEMPLO:

Dada la matriz de la aplicación :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

▪ ¿Obtener f (2, 3, 4) ?

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{vmatrix} 2x3 & 3x1 & 4x2 \\ 2x4 & 3x0 & 3x4 \\ 1x2 & 1x3 & 2x4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+3+8 \\ 8+0+12 \\ 2+3+8 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 20 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$\int(2,3,4) = (17,20,13)$ E F

(2,3,4)	(17,20,13)

NOTA : El número de columnas de la matriz de la aplicación = Dimensión E. Según el número de filas de la matriz de la aplicación = Dimensión F.

EJEMPLO:

Dada la matriz de la aplicación : $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

1. ¿De qué aplicación se trata?
2. Hallar f (2, 3, 4)

3. Hallar f (3,5)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dimensión E} = 2\\ \text{Dimensión F} = 3\end{array}\right\}$$

1. $\left.\begin{array}{l}\text{Dimensión E} = 2\\ \text{Dimensión F} = 3\end{array}\right\}$ Se trata de 1 aplicación $\int : \mathrm{IR}^2 \to IR^3$

2. f (2, 3, 4) → No se puede hallar la imagen de (2, 3, 4) porque el espacio origen es IR^2.

3. f (3,5)?

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x1 & 5x3\\ 3x4 & 5x0\\ 2x3 & 5x5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3+15\\ 12+0\\ 6+25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\ 12\\ 31\end{bmatrix}$$

IR^2	IR^3
(3, 5)	(18, 12, 31)
E	F

Ejemplo:

Dada la matriz de la aplicación $\boxed{M = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}}$

1. ¿De qué aplicación se trata?
2. Hallar f (2, 3, 4)
3. Hallar f (3,5)

1. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Dimensión E} = 3\\ \text{Dimensión F} = 2\end{array}\right\} \int : \mathrm{IR}^3 \to IR^2}$

2.

$$\boxed{\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}_{2x3} \bullet \begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}_{3x1} = \begin{vmatrix}2x1 & 3x3 & 4x0\\ 2x2 & 3x0 & 4x3\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}2+9+0\\ 4+0+12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\ 16\end{bmatrix}}$$

3. f (3,5) :

No se puede calcular puesto que, la f (3,5) es de origen IR^2 y el espacio origen es IR^3.

Nota:La <u>base canónica</u> de un espacio vectorial está formada por los elementos neutros.

- Base canónica de IR^2 es : {(1,0) , (0,1)}
- Base canónica de IR^3 es : { (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1)}
- Base canónica de IR^4 es : {(1,0,0,0,) , (0,1,0,0) , (0,0,1,0) , (0,0,0,1)}

Interpretación de la matriz de la aplicación :

Las columnas de la matriz de la aplicación son las imágenes de los vectores de la base canónica de E.

EJEMPLO:

- $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \text{Dimensión } E = 3 \\ \text{Dimensión } F = 3 \end{matrix}\right\} \int : IR^3 \to IR^3$

Interpretación de la matriz

$$\int(1,0,0) = (2,1,2) \to (1\cdot 2, 0\cdot 1, 0\cdot 2) = (2,0,0)$$
$$\int(0,1,0) = (3,0,2) \to (0\cdot 3, 1\cdot 0, 0\cdot 2) = (0,0,0)$$
$$\int(0,0,1) = (4,1,1) \to (0\cdot 4, 0\cdot 1, 1\cdot 1) = (0,0,1)$$
$$\downarrow$$

$$M \quad \text{BASES CANÓNICAS} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \text{Dimensión } E = 3 \\ \text{Dimensión } F = 2 \end{matrix}\right\} \int : IR^3 \to IR^2$$

INTERPRETACIÓN DE LA MATRIZ

$$\int(1,0,0) = (1,2) \to (1\cdot 1, 0\cdot 2) = (1,0)$$
$$\int(0,1,0) = (3,1) \to (0\cdot 3, 1\cdot 1) = (0,1)$$
$$\int(0,0,1) = (4,5) \to (0\cdot 4, 0\cdot 5) = (0,0)$$

- $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \text{Dimensión } E = 2 \\ \text{Dimensión } F = 3 \end{matrix}\right\} \int : IR^2 \to IR^3$

INTERPRETACIÓN DE LA MATRIZ

$$\int(1,0) = (1,3,5)$$
$$\int(0,1) = (4,1,2)$$

Aplicación lineal definida por sus componentes:

Cuando nos dan una aplicación lineal definida por sus Componentes, nos dan la imagen de un vector genérico E y se tendrá que:

1. El número de incógnitas será la dimensión de E.
2. El número de componentes será la dimensión de F.

EJEMPLO:

Dada la expresión: $\boxed{\int(x,y,Z)=\left(\underbrace{3x-2y,}\quad \underbrace{4y+3\in,}\quad \underbrace{y+Z}\right)}$

3 componentes

$$\left.\begin{array}{l}\text{El número de incognitas} = \dim E = 3 \\ \text{El número de Componentes} = \dim. F = 3\end{array}\right\} \int : IR^3 \to IR^3$$

$$\int(x,y) = (x+3y, 2x-y, x) \qquad \int : \mathrm{IR}^2 \to IR^3$$

$$\int(x,y,Z) = (x-y+Z, y+3x) \qquad \int : \mathrm{IR}^3 \to IR^2$$

Cuando nos dan una aplicación lineal definida por sus componentes, para hallar la imagen de un vector, basta con sustituir el vector en las componentes.

$$\boxed{\begin{array}{l}\int(x,y,Z) = (3x-2,4y+3Z, x+Z) \\ \int(1,2,3) = (3\cdot 1-2, 4\cdot 2+3\cdot 3, 1+3) \\ \int(1,2,3) = (+1,17,4)\end{array}}$$

Cuando nos dan una aplicación Lineal definida por sus componentes y nos piden obtener la matriz de la aplicación, bastará con copiar <u>por filas</u> los coeficientes de las incógnitas ene los componentes.

$$\boxed{\int(x,y,Z) = (3x-2y, 4y+3Z, x+Z)}$$

Hallar la matriz de la Aplicación:

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

EJEMPLO:

$$\boxed{\int(x,y) = \left(\underbrace{3x+4y}, \ \underbrace{2x - y}, \ \underbrace{x + y}, \ \underbrace{3x - 7y} \right)}$$

4 componentes

$$\left.\begin{array}{l} \text{Número de incognitas} = 2 \\ \text{Número de componentes} = \text{Dimensión F} = 4 \end{array}\right\} \int : \mathrm{IR}^2 \rightarrow IR^4$$

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}}$$

EJEMPLO:

Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ¿Cuál es la aplicación lineal?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Número de } \overbrace{\text{Incognitas}}^{\textit{Columnas}} = \text{Dimensión E} = 3 \\ \text{Número de } \underbrace{\text{Componentes}}_{\text{Filas}} = \text{Dimensión F} = 2 \end{array}\right\} \int : \mathrm{IR}^3 \rightarrow IR^2$$

$$\int(x,y,Z) = (3x + 5y + 4Z, x + 2y + 6Z)$$

EJEMPLO:

Si $\int(x,y) = (3x - 2y, 4x + y)$:

Hallar f (3,4).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dimensión E} = 2 \\ \text{Dimensión F} = 2 \end{array}\right\} \int : \mathrm{IR}^2 \rightarrow IR$$

$$\int(3,4) = (3 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = (9 - 8, 12 + 4) = (1,16)$$

IR^2	IR^2
(X, Y)	(1,16)
E	F

8. EJERCICIOS

EJERCICIO 1.

Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no lineales:

a) f_1: $IR^3 \rightarrow IR^3$, dada por $f_1(x,y,Z) = (x, x+y, x+y+Z)$

1. $f[(x_1, y_1, Z_1) + (x_2, y_2, Z_2)] = f(x_1, y_1, Z_1) + f(x_2, y_2, Z_2)$

$f[(x_1, y_1, Z_1) + (x_2, y_2, Z_2)] = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, Z_1 + Z_2) =$

$\boxed{= x_1 + x_2, x_1+y_1 + x_2+y_2, x_1 + y_1+Z_1 + x_2+y_2+Z_2}$

$f(x_1, y_1, Z_1) + f(x_2, y_2, Z_2) = (x_1, x_1+y_1, x_1+y_1+Z_1) + (x_2, x_2+y_2, x_2+y_2+Z_2) =$

$\boxed{= x_1 + x_2, x_1+y_1 + x_2+y_2, x_1 + y_1+Z_1 + x_2+y_2+Z_2 \quad \text{Sí se cumple.}}$

2. $f(\alpha(x, y, Z)) = \alpha \cdot f(x, y, Z)$

$f(\alpha(x, y, Z)) = \boxed{\alpha \cdot f(x, y, Z) \rightarrow xx, \alpha x + \alpha y, \ \alpha x + \alpha y + \alpha Z}$

$\alpha \cdot f(x, y, Z) = \alpha(x, x+y, x+y+Z) = \boxed{\alpha x, \alpha x+\alpha y, \alpha x+\alpha y+\alpha Z}$

Sí se cumple, por lo tanto, al cumplirse la propiedad 1 y 2, es una aplicación lineal.

b) f_2: $IR^2 \rightarrow IR^3$, dada por $f_2(x,y,) = (x, y, x+y)$

1. $f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

$f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

$\boxed{= x_1 + x_2, y_1+y_2, \ x_1+x_2 +y_1+ y_2}$

2. $f(\alpha(x, y)) = \alpha \cdot f(x, y)$

$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = \boxed{(\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y)}$ Sí que se cumple

$\alpha \cdot f(x, y) = \alpha \cdot (x, y, x+y) = \boxed{\alpha x, \alpha y, \alpha x+\alpha y}$

c) f_3: $IR^3 \rightarrow IR^2$, dada por $f_3(x, y, Z) = (x - y, y - Z)$

1. $f[(x_1, y_1, Z_1) + (x_2, y_2, Z_2)] = f(x_1, y_1, Z_1) + f(x_2, y_2, Z_2)$

$f[(x_1, y_1, Z_1) + (x_2, y_2, Z_2)] = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, Z_1 + Z_2) =$

$\boxed{= x_1 - y_1 + x_2 + y_2, y_1 + Z_1 + y_2 - Z_2}$

$f(x_1, y_1, Z_1) + (x_2, y_2, Z_2)] = (x_1 - y_1, y_1 - Z_1) + (x_2 - y_2, y_2 - Z_2) =$

$= \boxed{x_1 - y_1 + x_2 - y_2, y_1 - Z_1 + y_2 - Z_2}$ Sí que se cumple.

2. $f(\alpha(x, y, Z)) = \alpha \cdot f(x, y, Z)$

$f(\alpha(x, y, Z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha) = \boxed{\alpha x - \alpha y, \ \alpha y - \alpha Z}$

$\alpha \cdot f(x, y, Z) = \alpha \cdot (x - y, y - Z) = \boxed{\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha Z}$

Sí se cumple, por lo tanto forma Aplicación Lineal.

d) f_4: $IR^2 \rightarrow IR^2$, dada por $f_4(x, y) = (0, x + y + 2)$

↓

No se trata de una aplicación lineal, puesto que "f "está formado por un término independiente o constante.

e) f_5: $IR^3 \rightarrow IR^2$, dada por $f_5(x, y, Z) = (x^2, x + Z)$

↓

No se trata de una aplicación lineal, puesto que, al poseer "f " un término al cuadrado, determina una parábola.

EJERCICIO 2.

Obtener la matriz de las siguientes aplicaciones lineales:

a) f : $IR^3 \rightarrow IR^3$, dada por $f(x, y, Z) = (3x + y, x - y, x + Z)$.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 3x + y \\ \rightarrow x - y \\ \rightarrow x + Z \end{array}$$

b) g: $IR^3 \rightarrow IR$, dada por $g(x, y, Z) = 2x - 2y + 2Z$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

d) $\varnothing : IR^5 \rightarrow IR^2$, dada por $\varnothing\,(u, v, x, y, z) = (x, u)$

Para no equivocarnos ponemos:

$$\overbrace{(ou + ov + 1x + oy + oz}^{},\ \overbrace{u + ov + ox + oz)}^{}$$

$$(x\ ,\ u)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) $f : IR^3 \rightarrow IR^2$, dada por $f\,(x, y, Z) = (2x+y-5Z\,,\ 3x-3y-Z)$.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>EJERCICIO 3.</u>

Una aplicación lineal $\varnothing : IR^2 \longrightarrow IR^2$ cumple:

$\varnothing(1,2) = (3,4)$, $\varnothing\,(1,1) = (2,0)$

Hallar su matriz:

$$\left.\begin{array}{l} \int(1,2) = (3,4) \\ \int(1,1) = (2,0) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \int\left[1 \cdot \left(\underbrace{1,0}\right) + 2 \cdot \left(\underbrace{0,1}\right)\right] = (3,4) \\ \int\left[2 \cdot \left(\underbrace{1,0}\right) + 0 \cdot \left(\underbrace{0,1}\right)\right] = (2,0) \end{array}\right\}$$

Ahora hay que decir, como $\int$ es aplicación lineal :

Bases Canónicas

$$\begin{array}{l} 1 \cdot \int(1,0) + 2 \cdot \int(0,1) = (3,4) \\ 1 \cdot \int(1,0) + 1 \cdot \int(0,1) = (2,0) \end{array}$$

$\rightarrow$ Tenemos un sistema de Ecuac. Con 2 incógnitas

- Ahora restaremos las dos :

$$\begin{array}{l} 1 \cdot \int(1,0) + 2 \cdot \int(0,1) = (3,4) \\ -1 \cdot \int(1,0) + 1 \cdot \int(0,1) = (2,0) \\ \hline \end{array}$$

$1 \cdot \int(0,1) = (1,4)$ $\rightarrow$ Ahora sustituyo

$$1 \cdot \int(1,0) + 2 \cdot (1,4) = (3,4)$$

$$\int(1,0) + (2,8) = (3,4) \quad \rightarrow \quad \int\ (1,0) = (1,4)$$

EJERCICIO 4.

Una aplicación f : $IR^3 \to IR^2$ cumple f (1,1,1) = (2,2) y f (2,2,2) = (4,3). Si es lineal, calcular su matriz.

f : $IR^3 \to IR^2$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,1) = (2,2) \\ f(2,2,2) = (4,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} f[1\cdot(1,0,0)+1(0,1,0)+1\cdot(0,0,1)] = (2,2) \\ f[2\cdot(1,0,0)+2\cdot(0,1,0)+2\cdot(0,0,1)] = (4,3) \end{array}$$

- Este ejercicio está hecho con mala pata, porque no llegaría a resolverse el sistema y no habría solución.

$$f(2,2,2) = f\cdot[2\cdot(1,1,1)] = 2\cdot f(1,1,1) = 2\cdot(2,2) = (4,4)$$

y según el enunciado f (2,2,2) = (4,3) Es Incompatible.

- No existe matriz porque el sistema es Incompatible.

EJERCICIO 5.

Idem con h: $IR^3 \to IR^2$ tal que h (1,1,1) = (2,2) y h (2,2,2) = (4,4).

f : $IR^3 \to$ IR

2

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,1) = (2,2) \\ f(2,2,2) = (4,4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} f\cdot[1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1)] = (2,2) \\ f\cdot[2\cdot(1,0,0)+2\cdot(0,1,0)+2\cdot(0,0,1)] = (4,4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1\cdot f(1,0,0)+1\cdot f(0,1,0)+1\cdot f(0,0,1) = (2,2) \\ -2\cdot \underline{f(1,0,0)+2\cdot f(0,1,0)+2\cdot f(0,0,1) = (4,4)} \\ \quad f(1,0,0)+f(0,1,0)+f(0,0,1) = (2,2) \end{array}$$

NOTA: Si en un sistema de ecuaciones, una ecuación es C. Lineal de otra u otros, dicha ecuación debe de eliminarse (es la misma).

$$\boxed{f(1,0,0)+f(0,1,0)+f(0,0,1) = (2,2) \quad \begin{array}{l} \text{Es un sistema compatible} \\ \text{Indeterminado} \to \text{tiene infinitas} \\ \text{soluciones, tendremos infinitas matrices} \end{array}}$$

Una de ellas sería:

$$\int(1,0,0)+\int(0,1,0)+\int(0,0,1)=(2,2)$$
$$(3,4)+(4,5)+(-5,-7)=(2,2)$$

↓

Con tal de que nos dé (2,2) las matrices son infinitas.

Una matriz sería:

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 6.

Sea f : $IR^2 \to IR^3$ una aplicación lineal definida de la siguiente manera:

f (1,1) = (-2, -1, -3) y f (-1,0) = (2,1,3).

Halla la matriz asociada a "f" respecto de las base Canónicas.

$$\left.\begin{array}{l} \int(1,1)=(-2,-1,-3)\rightarrow\left[\int[1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)]\right]=(-2,-1,-3) \\ \int(-1,0)=(2,1,3)\rightarrow\left(\int[-1\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)]\right)=(2,1,3) \end{array}\right\} \text{Como "}\int\text{" es Aplicación Lineal :}$$

$$1\cdot\int(1,0)+1\cdot(0,1)=(-2,-1,-3)$$
$$-1\cdot\int(1,0)+0\cdot\int(0,1)=(2,1,3)$$
$$1\cdot\int(0,1)=(0,0,0)$$

$$\int(1,0)+1\cdot(0,0,0)=(-2,-1,-3)$$
$$\int(1,0)=(-2,-1,-3)$$

$$M=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: Si una serie de vectores de E forman una base sus imágenes formarán una base de f, siempre y cuando coincida el número de vectores con la dimensión del espacio.

(En IR^n, n+1 – vectores son siempre L.D)