COLECCIÓN APUNTES UNIVERSITARIOS

MATEMÁTICA FINANCIERA

GRADO ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS 6 Créditos

GRADO FINANZAS Y CONTABILIDAD 6 Créditos

DOBLE GRADO ADE- DERECHO 6 Créditos

Edita e imprime: PILLATONER SL

C/ Ramón Llull, 45 bajo – 46021 – Valencia

Teléfono: 96 304 57 13

E-mail:pillatoner@yahoo.es

Fecha segunda edición: Noviembre 2014

Prólogo

Pillatoner SL, es una empresa dedicada a la edición y venta de apuntes para universitarios. Somos una empresa joven que tiene por objetivo lograr dotar al estudiante universitario de un material de apoyo adicional a los ya existentes (manuales, asistencia a clase, material de reprografía, etc.)

Es por ello que recopilamos los apuntes de aquellos alumnos que asisten regularmente a clase, que completan sus apuntes con manuales, así como con conocimientos previos. Ofrecemos al estudiante, un resumen de lo más imprescindible de cada asignatura, con el fin de que sirva de material adicional (adicional porque sin conocimientos previos, difícilmente valdrá de algo esta compilación de apuntes), a los métodos ya existentes.

Esperemos que con esta colección, la vida universitaria se haga al estudiante más corta y fructífera. Suerte y a estudiar, que es el único método conocido (exceptuando las chuletas), de aprobar la carrera.

Temario

Tema 5. Operación de amortización. Prestamos

- Planteamiento general de la operación de amortización con interés postpagables
- Préstamo americano
- Préstamos francés
- Prestamos con cuotas de amortización constantes
- Préstamos indexados
- Problemas

Tema 6. Empréstitos de obligaciones

- Concepto y clases
- Estudio financiero
- Coste y rendimiento de la emisión
- Valor de una obligación en el mercado
- Problemas

TEMA 1. CONCEPTOS PREVIOS

1. INTRODUCCIÓN

Se van a analizar los intercambios financieros considerando un ambiente de certeza.

El intercambio financiero supone que un agente libra a otro un capital (o capitales) quedando obligado el que recibe a devolver, en el término acordado, el capital prestado más una cantidad (llamada interés) que representara el precio por haberlo dispuesto durante ese plazo.

El interés puede definirse como la cantidad, expresada en unidades monetarias, que será necesaria pagar por disponer de capitales ajenos durante un determinado periodo de tiempo. El interés dependerá del importe del capital dispuesto y del intervalo de tiempo durante el que se dispone de dicho capital.

El capital financiero es la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad, vencimiento o libramiento. Es una magnitud bidimensional (C, t) donde C representa la cantidad de dicho capital que esta expresada en unidades monetarias (euros, dólares, etc.) y t el momento de tiempo en que es disponible, con
$C \in R^+$, $t \in R$.

2. LEYES FINANCIERAS

Dado un capital (C, t), la ley financiera es la expresión matemática que permite obtener, en un momento t_n, la cantidad equivalente (C+I) del capital al que se renuncia.

Ley de Capitalización simple

Con este criterio, el interés **I** que se pagara por disponer de un capital de cantidad **C** en un periodo de tiempo dado **n**, se determina de manera proporcional al capital dispuesto y a la amplitud del periodo. Esto es:

$$I = C \cdot i \cdot n = C \cdot i \cdot (t_n - t)$$

Siendo **I** el “tipo de interés” o precio a pagar al final del periodo por unidad de capital e **i** el tipo de interés expresado en la misma unidad de medida que el tiempo.

$$\begin{cases} \textit{Ejemplo}1 \qquad C = 6000 \in \qquad n = 2 \text{ años} \qquad i = 0'04 \\ I = 6000.\ 0'04.\ 2 = 480 \end{cases}$$

De esta forma, la cantidad que se recibirá al final del periodo, Cn, tendrá la siguiente expresión:

$$Cn = C + i = C + C \cdot i \cdot n = C\,(1 + i \cdot n)$$

A partir de esta expresión, la ley de capitalización simple será:

$$L\,(t;\, t_n) = (1+i\cdot n), \text{ de forma que } C_n = C\,(1+i\cdot n) = C \cdot L\,(t;\, t_n)$$

En la práctica, el parámetro i suele expresarse en términos anuales, por tanto el tiempo n, se expresara en años o fracción de año. Esto es:

$$L(t;t_n) = (1 + i \cdot n) = \left(1 + i \cdot \frac{K}{m}\right), amb\ \mathrm{n} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$$

donde:

m = fraccionamiento, es decir, el número natural que representa los subperiodos de igual amplitud en que se divide el año (m=12 meses, m=4 trimestres, m=365 días...)

K = número de subperiodos comprendidos entre t i t_n.

$$\begin{cases} \textit{Ejemplo}2 \qquad C = 5000 \in \quad i = 0'04 \\ \text{Por } 180 \text{ días } C_n = 5000\left(1 + 0'04 \cdot \dfrac{180}{365}\right) = 5098'63 \qquad \text{Los intereses no generan} \\ \text{Por } 3 \text{ meses } C_n = 5000\left(1 + 0'04 \cdot \dfrac{3}{12}\right) = 5050 \qquad \text{intereses. Más alta menos de un año} \end{cases}$$

Ley de Capitalización compuesta

Si se aplica la expresión anterior, la cantidad que se obtendría por posponer la disposición del capital n periodos sería:

$$C_n = C \cdot L\,(t;\, t_n) = C \cdot (1+i\cdot n)$$

No obstante, podría plantearse una alternativa a esta situación, dividiendo la duración total del periodo en n subperiodos y planteando la misma operativa para cada uno de ellos, pero reinvirtiendo los capitales obtenidos al final de cada periodo para un periodo más. Así:

1er período (amplitud 1) → $C_1 = C \cdot (1+i \cdot 1)$

2n período (amplitud 1) → $C_2 = C_1 \cdot (1+i\cdot 1) = C\cdot(1+i\cdot 1)(1+i\cdot 1)=C\cdot(1+i)^2$

período n (amplitud 1) → $C_n = C_{n-1}\cdot(1+i\cdot 1)=C\cdot(1+i\cdot 1)(1+i\cdot 1)....(1+i\cdot 1)=C\cdot(1+i)^n$

siendo **i** el tipo de interés, expresado en la misma unidad que el tiempo.

A la ley resultante se le denomina capitalización compuesta y su expresión es:

$L(t;t_n)=(1+i)^n$ i, por tanto, $C_n = C\cdot(1+i)^n = C \cdot L(t;t_n)$

En la práctica, el parámetro i suele expresarse en términos anuales por lo que el tiempo, n, se expresara en años o fracción de año:

$$L(t;t_n) = (1+i)^n = (1+i)^{k/m}, amb \quad \mathrm{n} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$$

donde:

- m = fraccionamiento
- k = número de subperíodos comprendidos entre t i t_n

$$\begin{cases} Ejemplo 3 \qquad \mathrm{C} = 5000 \in \qquad \mathrm{i} = 0'04 \\ \text{Por } 180 \text{ días } \mathrm{C_n} = C \cdot L(t;tn) = C(1+i)^n = C(1+i)^{K/m} = 5000(1+0'04)^{180/365} = 5097'65 \\ \text{Por } 3 \text{ meses } \mathrm{C_n} = 5000(1+0'04)^{3/12} = 5049'27 \end{cases}$$

Por otra parte, los intereses se obtendrían de la expresión:

$$I = C_n - C = C \cdot \left|(1+i)^{k/m} - 1\right| \text{ i si } \mathrm{k/m} = 1 \rightarrow \mathrm{I} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{i}$$

$$\begin{cases} Ejemplo 4 \qquad \mathrm{C} = 5000 \in \qquad \mathrm{i} = 0'04 \qquad \mathrm{n} = 3 \text{ años} \\ \mathrm{I} = C_n - C = C(1+i)^n - C = C\left[(1+i)^n - 1\right] = 5000\left[(1'04)^3 - 1\right] = 624'32 \\ \mathrm{C} = 5000 \in \qquad \mathrm{n} = 3 \text{ meses} \qquad \mathrm{i} = 0'01 \text{ trimestral} \\ \mathrm{I} = \mathrm{C}\left[(1+\mathrm{i})^n - 1\right] = \left[(1'01)^1 - 1\right] = 50 \end{cases}$$

Como puede observarse, la idea fundamental de la capitalización compuesta es que los intereses generan a su vez intereses. La utilización de este criterios supondría el mismo resultado que la aplicación de la ley de capitalización simple de forma sucesiva, reinvirtiendo cada vez los capitales generados en el periodo anterior.

Comparación de la ley de capitalización simple con la compuesta

$Ejemplo5 \qquad C = 1000 \qquad i = 0'06$

	LCS		LCC	
N(AÑOS)	INTERESES ACUMULADOS	INTERESES POR PERIODO	INTEREES ACUMULADOS	INTERESES POR PERIODO
¼	15	15	14’67	14’67
½	30	15	29’56	14’89
1	60	30	60	30’44
2	120	60	123’60	63’60
3	180	60	191’02	67’42
4	240	60	262’48	71’46
5	300	60	338’23	75’75
10	600	60	790’85	101’37

$$LCS \to L(t;tn) = 1 + i \cdot n \qquad LCC \to L(t;tn) = (1+i)^n$$

$$LCS \to I = C \cdot i \cdot n \qquad LCC \to I = C_n - C = C(1+i)^n - C = C\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Ley de descuento simple

En ocasiones, la operación financiera se concibe como el abono en el momento actual de una cantidad conocida que se debería entregar en un momento futuro. El precio o recompensa se llama “descuento” (en vez de interés) y la ley financiera más usada es la ley de descuento simple comercial.

$$D = C \cdot d \cdot n$$

Siendo **d** el tipo de descuento o precio a pagar al inicio del periodo por unidad de capital y unidad de tiempo, expresado en la misma unidad que venga medido el tiempo.

$$\begin{cases} Ejemplo\ 6 \qquad n = 2\ \text{meses} \qquad C = 2500\,€ \qquad d = 0'005\ \text{mensual} \\ D = 2500 \cdot 0'005 \cdot 2 = 25 \end{cases}$$

Por lo tanto, la cantidad C_o que se recibiría al inicio del periodo, se obtendría de la expresión siguiente:

$$C_o = C - D = C - C \cdot d \cdot n = C\,[1 - d \cdot n]$$

La expresión de la ley de descuento simple comercial es:

$A(t_o; t) = 1 - d \cdot n$ con $n = t - t_o$ I, por lo tanto: $C_o = C \cdot A(t_o; t)$

En la práctica el parámetro d se suele expresar en términos anuales por lo que el tiempo, n, se expresara en años o fracción de años. Esto es:

$$A(t_o;t) = 1 - d \cdot \frac{k}{m}, \quad amb \quad \mathrm{n} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$$

Dónde:

- m = fraccionamiento.
- k = Número de subperiodos comprendidos entre t_o i t.

$$\begin{cases} \textit{Ejemplo}\ \ 7 \qquad \mathrm{C} = 6000 \in \qquad \mathrm{d} = 0'06 \qquad \mathrm{n} = 90\ \text{días} \\ \mathrm{C_o} = C[1 - dn] = 6000\left[1 - 0'06 \cdot \frac{90}{365}\right] = 5911'23 \\ \mathrm{C} = 6000 \in \qquad \mathrm{d} = 0'06 \qquad \mathrm{n} = 6\ \text{meses} \\ \mathrm{C_o} = C[1 - dn] = 6000\left[1 - 0'06 \cdot \frac{6}{12}\right] = 5820 \end{cases}$$

3. SUMA FINANCIERA

El capital suma financiera se define como el capital financiero (S,r), donde la cantidad S es la suma aritmética de las cantidades equivalentes en r a las cantidades de los capitales sumandos.

Dados los capitales financieros (C_1, t_1) I (C_2, t_2) I suponiendo que $r > t_2 > t_1$, el capital financiero se determina:

$$S_r = C_1\, L(t_1; r) + C_2\, L(t_2; r)$$

En el caso de que existan m capitales sumandos (C_1, t_1), $(C_2\ t_2)$,..., (C_m, t_m) y suponiendo que $r > t_m > \ldots > t_2 > t_1$ el capital financiero será:

$$S_r = C_1\, L(t_1; r) + C_2\, L(t_2; r) + \ldots\ldots + C_m\, L(t_m; r)$$

Todo en el caso de una ley de capitalización.

La definición del capital suma financiera permite extender el concepto de equivalencia financiera entre capitales a equivalencia financiera entre conjuntos de capitales y así se dice que dos conjuntos de capitales son equivalentes, en base a una ley financiera, cuando en un mismo momento tienen el mismo capital suma financiera.

Ejemplo 9

$A = \{(5000, t+1)(2000, t+3)\} \quad (\mathrm{S}, \mathrm{t}+4) \qquad \mathrm{L}(\mathrm{t}; \mathrm{t}_{\mathrm{n}}) = (1+0'05)^{tn-t}$

$$S = C_{t+4}^{t+1} + C_{t+4}^{t+3} = 5000(1'05)^3 + 2000(1'05) = 7888'12$$

$$B = \{(1000, t+2)(3500, t+3)(x, t+4)\}$$
$$S_{t+4}^{B} = 1000L(t+2, t+4) + 3500L(t+3, t+4) + x \cdot L(t+4, t+4) =$$
$$= 1000(1'05)^2 + 3500(1'05)^1 + x = S_{t+4}^{A} = 7888'12$$
$$x = 3110'62$$

¿Cómo se pueden sumar capitales si en el caso de una ley de capitalización el vencimiento del capital suma no cumple que r $>t_m>...>t_2>t_1$? Hay dos maneras de resolverlo:

- Utilizando el factor financiero.
- Se plantea la ecuación en el momento donde venza el último capital y a continuación se despeja de la cantidad del capital suma.

4. OPERACIÓN FINANCIERA

A partir de los conceptos anteriores, se define operación financiera como el intercambio no simultaneo de capitales financieros pactado, entre dos agentes económicos, de forma que se verifica la equivalencia en base a una ley financiera, entre los capitales entregados por una parte y la otra.

El conjunto de los n capitales que entrega el prestamista se llama prestación. El conjunto de los n capitales que entrega el prestatario se llama contraprestación.

La persona que recibe el primer capital se llama prestatario. La persona que libra el primer capital se llama prestamista.

PROBLEMAS

PROBLEMA 1

a) 18 meses interés anual 3 % C = 9000

$$C_n = C[1 + i \cdot n] = 9000\left[1 + \frac{0'03}{12} \cdot 18\right] = 9405$$

$$I = C \cdot i \cdot n = 9000 \cdot \frac{0'03}{12} \cdot 18 = 405$$

b) 30 días interés anual 5 % C = 9000

$$I = 9000 \cdot \frac{0'05}{365} \cdot 30 = 36'99 \qquad \mathrm{I} = 9000 \cdot \frac{0'05}{360} \cdot 30 = 37'5$$

c) 1 año interés anual 2’5 % C = 9000

$$I = 9000 \cdot 0'025 \cdot 1 = 225$$

PROBLEMA 2

a) 3 años interés anual 4’5 % C = 6000

C_3 = 6000 (1+0’045 · 3) = 6810

b) 90 días interés anual 4’5 % C = 6000

$$C_{90} = 6000\left(1 + \frac{0'045}{365} \cdot 90\right) = 6066'58$$

PROBLEMA 3

a) C = 9000 i = 0’03 18 meses

$C_{18} = C(1+i)^n$ = 9000 $(1+0'03)^{18/12}$ = 9408’02 I = C_{18} – C = 408’02

b) C = 9000 I = 0’05 30 días

C_{30} = 9000 $(1+0'05)^{30/365}$ = 9036’16 I = C_{30}-C = 36’16

c) C = 9000 I = 0’025 1 año

C_1 = 9000 (1+0’025) = 9225 I = C_1 – C = 225

PROBLEMA 4

	LCS		LCC	
	Acum.	Peri.	acum.	Peri
1 año	500	500	500	500
2 años	1000	500	1025	525
3 años	1500	500	1576'25	551'25
4 años	2000	500	2155'06	578'81

5 % anual C = 10.000

$a) I = 10.000 \cdot 0'05 \cdot 1 = 500 LCS$

$\mathrm{I} = 10.000\,(1+0'05) - 10.000 = 500\ \mathrm{LCC}$

b) $I = 10.000 \cdot 0'05 \cdot 2 = 1000 LCS$

$\mathrm{I} = 10.000(1+0'05)^2 - 10.000 = 1025\ \mathrm{LCC}$

c) $I = 10.000 \cdot 0'05 \cdot 3 = 1500 LCS$

$\mathrm{I} = 10.000(1+0'05)^3 - 10.000 = 1576'25\ \mathrm{LCC}$

d) $I = 10.000 \cdot 0'05 \cdot 4 = 2000 LCS$

$\mathrm{I} = 10.000(1+0'05)^{42} - 10.000 = 2155'06\ \mathrm{LCC}$

En capitalización compuesta los intereses que se generan en cada periodo se acumulan al capital para generar nuevos intereses.
En capitalización simple los intereses se pagan sobre el capital inicial.

PROBLEMA 5

$C_0 = C \cdot A\,(t_0, t) = C\,[1\text{-}d\cdot n]$ $D = C - C_0$ $D = C \cdot d \cdot n$

C = 3000 3 % anual 3 meses

$D = 3000 \cdot \dfrac{0'03}{12} - 3 = 22'50$ $3000 - 22'50 = 2977'50$

PROBLEMA 6

a) C = 6000 90 días 5 % anual

$C_o = 6000\left[1 \cdot \dfrac{0'05}{365} \cdot 90\right] = 5926'03$ $6000 - 5926'03 = 73'97$

b) C = 9500 8 meses 0'3 % mensual

$C_o = 6000[1 - 0'003 \cdot 8] = 9272$ $9500 - 9272 = 228$

c) C = 15000 1 año 3' 5 % anual

$C_o = 15000[1 - 0'035] = 14475 \qquad 15000 - 14475 = 525$

PROBLEMA 7

a) C = 3000 i = 4 % anual 76 meses

Simple $C_n = 3000\left[1 + \frac{0'04}{12} \cdot 76\right] = 3760$

Compuesta $C_n = 3000(1 + 0'04)^{76/12} = 3845'91$

b) C = 5000 i = 0'04 % anual 49 meses

Simple $C_n = 5000 \cdot \left[1 + \frac{0'04}{12} \cdot 49\right] = 5816'67$

Compuesta $C_n = 5000(1 + 0'04)^{49/12} = 5868'44$

c) C = 1000 i = 0'04 % anual 2 años

Simple $C_n = 1000[1 + 0'04 \cdot 2] = 1080$

Compuesta $C_n = 1000(1 + 0'04)^2 = 1081'60$

PROBLEMA 8

$S = C_1 L(t_1, z) + C_2 L(t_2, z) + \ldots + C_m L(t_m, Z)$

a) $L(t, t_n) = (1+0'035)^{t_n - t}$ $S = 7000\ L(1'5) + 5000\ L(2'5) + 1000\ L(3'5) =$

$= 7000\ (1+0'035)^{s-1} + 5000\ (1+0'035)^{s-2} + 1000\ (1+0'035)^{s-3} = 14647'48$

b) $L(t, t_n) = 1+0'0275^{(tn-t)}$ $S = 7000[1+0'0275(s-1)]+5000\ [1+0'0275(s-2)] +$

$+1000[1+0'0275(s-3)]=14237'5$

La equivalencia financiera de capitales es independiente de la ley financiera utilizada? FALSO si que depende.

PROBLEMA 9

$L(t, t_n) = (1 + 0'045)^{tn - t}$ $S_A = 1000(1 + 0'045)^{s-0} + 3000(1 + 0'045)^{s-2} + 5000(1 + 0'045)^{s-4} =$

$= 9894'68$

$S_B = 900(1 + 0'045)^{s-1} + 1500(1 + 0'045)^{s-3} + x = 2711'30x$

$S_A = S_B \qquad 9894'68 = 2711'30x \qquad x = 7183'38$